## Zykel

Permutationen können als ziffernfremde Zykel ausgedrückt werden. Es gibt $n!$ Permutationen auf $\{1,\ldots,6\}$. Die Anzahl der Permutationen von $n$ Zahlen mit $k$ Zykeln ist rekursiv durch die Stirlingzahlen erster Art definiert. Es gilt

$$s_{n,k} = \begin{cases} s_{n-1,k-1} + (n-1)\cdot s_{n-1,k}, & \text{falls } n > k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit } s_{n,0} = 0, s_{0,0} = 1$$

## Komposition

Die Komposition $\rho \circ \sigma$ für zwei Permutationen $\rho, \sigma$ wird durch sukzessives Ausführen der Permutationen (von rechts nach links) erstellt. Hierbei gilt $(\rho \circ \sigma)(x) = \rho(\sigma(x))$.

## Inversionstafel

Für eine Permutation $\rho \in \mathcal{S}_n$ ist die Inversionstafel $I(\rho)$ eine Folge von $n$ Ziffern. Man konstruiert die Inversionstafel aus der Matrixschreibweise der Permutation.

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_5 \Rightarrow I(\rho) = 4\ 0\ 2\ 0\ 0$$

Hierbei liest man lediglich in der unteren Zeile ab. Die $i$-te Ziffer der Inversionstafel ist die Anzahl der Ziffern in der unteren Matrixzeile, welche links von $i$ stehen und echt größer als $i$ sind.

## Komposition zu bestimmten Zykeltypen

Um eine Permutation vom Typen $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ durch Komposition $\sigma \circ \rho$ für ein gegebenes $\sigma \in \mathcal{S}_k, k \geq n$ zu finden, verwendet man den Ansatz (Sei hierzu $\sigma = (1\ 4\ 3)(2\ 5\ 6)$ und gesucht der Typ $(3,2,1)$) in dem man eine Permutation wählt die dem geforderten Typ genügt und sich dann das $\rho$ entsprechend wählt:

$$\begin{aligned} \sigma \circ \rho &= (1\ 2\ 3)(4\ 5)(6) \\ &= (1\ 4\ 3)(2\ 5\ 6) \circ \underbrace{(1\ 6\ 5)(2\ 4)(3)}_{\rho} \end{aligned}$$

## Potenzen von Permutationen

Um allgemein eine Aussage über bestimmte Potenzformen einer Permutation, wie etwa $\pi^{282j+4}$ treffen zu können muss zuerst die Ordnung von $\pi$ festgestellt werden. Sei z.B. $\pi = (1\ 3\ 7)(2)(4\ 5\ 6) \in \mathcal{S}_7$, dann ist die Ordnung von $\pi^{\mathrm{kgV}\{1,3\}} = \pi^3 = id$. Jetzt löst man

$$\pi^{282j+4} = \pi^{282j} \circ \pi^4 = \pi^{282j} \circ \pi^3 \circ \pi = \pi^{282j} \circ id \circ \pi = \pi^{3^{94j}} \circ \pi = id^{94j} \circ \pi = \pi$$

## Inversion von Permutationen

Soll eine gegebene Permutation $\sigma$ invertiert werden, so werden die Zykel von $\sigma$ einfach rückwärts in $\sigma^{-1}$ geschrieben:

$$\sigma = (1\ 3\ 5)(4\ 2)(6) \Rightarrow \sigma^{-1} = (5\ 3\ 1)(2\ 4)(6)$$

## Involution

Eine Involution ist eine Permutation $\pi$ für die gilt $\pi^2 = id$. Eine Permutation ist genau dann eine Involution, wenn sie keine Zykel der Länge $\geq 3$ hat.