Lösen von linearen homogenen Rekurrenzen

Gegeben sei eine homogene lineare Rekurrenzgleichung k-ter Ordnung mit k Anfangswerten der Form

$$x_n = \alpha_1 x_{n-1} + \cdots + \alpha_k x_{n-k}, n \geq k, x_0 = a_0, \ldots x_{k-1} = a_{k-1}$$

Gesucht ist eine explizite Darstellung der Funktion. Zum ermitteln der expliziten Darstellung wendet man folgendes Schema an:

(1) Umstellen der Rekurrenzgleichung

Die Gleichung wird so umgestellt, dass eine Seite der Gleichung 0 ist, also in die Form

$$x_n - \alpha_1 x_{n-1} - \cdots - \alpha_k x_{n-k} = 0$$

(2) Ansatz über ein Polynom

Die Terme $\alpha_i x_i$ werden ersetzt durch $\alpha_i t^i$. Es entsteht eine Polynomgleichung der Form

$$t^n - \alpha_1 t^{n-1} - \cdots - \alpha_k t^{n-k} = 0$$

dessen Nullstellen ermittelt werden. Bevor dies passiert, wird die Gleichung noch durch t^{n-k} dividiert. So formuliert man das Nullstellenproblem

$$p(x) = t^k - \alpha_1 t^{k-1} - \cdots - \alpha_k = 0$$

(3) Ermitteln der Nullstellen

Nun müssen die Nullstellen des aufgestellten Polynoms ermittelt werden. Seien diese $v_0, \ldots, v_m$ die Nullstellen mit $p(v_i) = 0, \forall i \in \{0, \ldots, m\}$.

(4) Ansatz für die explizite Darstellung

Jetzt wird ein Ansatz für die explizite Darstellung der Formel aufgestellt. Hierzu verwendet man die Nullstellen v_i um die Gleichung

$$x_n = A_0(v_0)^n + \cdots + A_m(v_m)^n$$

aufzustellen. Um die explizite Formulierung zu gewinnen müssen die Koeffizienten $A_0, \ldots, A_m$ berechnet werden. Dies geschiet indem man jeweils für n die Indizes wählt, welche zu den vorgegebenen Startwerten der ursprünglichen Rekurrenzgleichung gehören.

Beispiel

Gegeben sei die homogene lineare Rekurrenzgleichung $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ von 2-ter Ordnung mit Anfangswerten $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$.

(1)

Umgestellt lautet die Rekurrenzgleichung $x_n - x_{n-1} - x_{n-2} = 0$.

(2)

Das Entsprechende Polynom ist $t^2 - t - 1 = 0$.

(3)

Dessen Nullstellen mit $v^2 - v - 1 = 0$ sind alle $v \in \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$.

(4)

Der Ansatz für die explizite Darstellung lautet nun $x_n = A_0(v_0)^n + A_1(v_1)^n$. Mit dem Anfangswert für $n = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} x_0 = 0 &= A_0(v_0)^0 + A_1(v_1)^0 \\ &= A_0 + A_1 \\ \Rightarrow A_0 &= -A_1 \end{aligned}$$

Substitution in die Gleichung für $n = 1$:

$$\begin{aligned} x_1 = 1 &= A_0 v_0 + A_1 v_1 \\ &= A_1 v_1 - A_1 v_0 \\ &= A_1(v_1 - v_0) \\ \Rightarrow A_1 &= \frac{1}{v_1 - v_0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Also gilt lautet die explizite Formulierung der Rekurrenzgleichung

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$