Fragestellung

Die Frage, welche Objekte aus einer Menge bestimmte (von einander unabhängige) Eigenschaften haben, kann durch das Prinzip von Inklusion und Exklusion geklärt werden.

Inklusion und Exklusion

Seien $X_1, X_2, X_3 \subseteq U$ Teilmengen eines Universums U, welche alle Elemente beinhalten für die eine bestimmte Eigenschaft gilt. Die Anzahl der Elemente von U für die eine dieser drei Eigenschaften gilt ist

$$n = |X_1| + |X_2| + |X_3| - |X_1 \cap X_2| - |X_1 \cap X_3| - |X_2 \cap X_3| + |X_1 \cap X_2 \cap X_3|$$

Andersherum ist dann die Anzahl der Elemente für die keine der drei Eigenschaften zutrifft

$$n = |U| - |X_1| + |X_2| + |X_3| - |X_1 \cap X_2| - |X_1 \cap X_3| - |X_2 \cap X_3| + |X_1 \cap X_2 \cap X_3|$$

Abstraktion

Der erste Schritt ist es immer, eine Mengendarstellung für ein gegebenes Problem zu finden, also Mengen welche von den angegebenen Eigenschaften charakterisiert werden.

Abzählung

Nach dem obigen Schema sieht man, dass man für jeden beliebigen Schnitt der charakterisierten Mengen die Kardinalität wissen muss. Je nach Problemstellung können hier Tricks die Berechnung der Schnittkardinalitäten wesentlich vereinfachen.

Beispiel

Zur Verdeutlichung soll folgendes Beispiel dienen. Die Problemstellung lautet wie folgt: Wieviele natürliche Zahlen $\leq 10^5$ sind weder von der Form x^2, x^3 oder x^5 für $x \in \mathbb{N}$?

1. **Abstraktion**: Wir konstruieren Mengen die von den geforderten Eigenschaften charakterisiert werden.
   - $X_2 = \{n^2 | n^2 \leq 10^5, n \in \mathbb{N}\}$ ist die Menge aller Quadratzahlen $\leq 10^5$.
   - $X_3 = \{n^3 | n^3 \leq 10^5, n \in \mathbb{N}\}$ ist die Menge aller Dreipotenzen $\leq 10^5$.
   - $X_5 = \{n^5 | n^5 \leq 10^5, n \in \mathbb{N}\}$ ist die Menge aller Fünfpotenzen $\leq 10^5$.

2. **Abzählung**: Wir zählen die Mengen ab. Hierbei sollte man sich möglichst klug anstellen, denn hier kann man oft viel Arbeit einsparen. Wir wissen beispielsweise das $|X_5| = 10$ ist, denn 10^5 ist letzte Fünferpotenz $\leq 10^5$. Dazu kommt nun, dass $|X_3| = 46$ und $|X_2| = 316$ ist. Für die Schnittmengenkardinalitäten hilft es zu wissen, daß eine Zahl die gleichzeitig die Form a^i und b^j hat, auch immer die Form c^n hat, falls n das kleinste gemeinsame Vielfache von i und j ist. Bei X_2, X_3 müssen wir uns also Fragen welche Zahlen gleichzeitig Dreierpotenzen und Quadratzahlen sind. Da $\texttt{kgV}\{2, 3\} = 6$ ist, müssen wir uns also überlegen welche Zahlen Sechserpotenzen sind etc. Wir finden heraus, dass gilt $|X_2 \cap X_3| = 6, |X_2 \cap X_5| = 3, |X_3 \cap X_5| = 2$ und letztendlich $|X_2 \cap X_3 \cap X_5| = 1$ ist.

3. **Anwendung**: Die Anzahl der Zahlen die weder Quadratzahl, noch Dreier- oder Fünferpotenz ist:

$$\begin{aligned} n &= 10^5 - |X_2| - |X_3| - |X_5| + |X_2 \cap X_3| + |X_3 \cap X_5| + |X_2 \cap X_5| - |X_2 \cap X_3 \cap X_5| \\ &= 10^5 - 316 - 46 - 10 + 6 + 2 + 3 - 1 \\ &= 99638 \end{aligned}$$

   Andersherum gibt es genau $10^5 - 98954 = 362 Zahlen \leq 10^5$, welche Quadratzahlen bzw. Dreier- oder Fünferpotenzen sind.