

## Aufgabe 1 (10 Punkte)

Welche der folgenden Grapheigenschaften sind vererbbar? Besitzen sie eine endliche Ausschlußmenge? Beweisen Sie Ihre Aussagen.

- a) Hamiltonische Graphen
- b) Graphen, die kein Wagenrad als induzierten Untergraphen enthalten
- c) Split-Graphen (Graphen, die chordal sind, und deren Komplementgraph ebenfalls chordal ist)

*Lösungsvorschlag:*

- a) Dies ist keine vererbbare Grapheigenschaft. Der  $k$ -Kreis ist offenbar hamiltonsch. Seine echten induzierten Subgraphen sind allerdings entweder Pfade, leer oder haben mehrere Zusammenhangskomponenten. Sie sind also nicht hamiltonsch. Entsprechend kann es keine endliche Ausschlußmenge geben.
- b) Diese Grapheigenschaft ist vererbbar, da wir durch das Bilden von induzierten Untergraphen, nur Kanten und Knoten entfernen. Es kann also dabei kein neu entstehen. Weiter gibt es keine endliche Ausschlußmenge: Sei  $R_n$  das Wagenrad mit  $n$  Speichen.  $R_n$  als Rad muss also selbst verboten sein. Jeder echte induzierte Untergraph von  $R_n$  ist besitzt aber selbst kein Wagenrad. Demnach muß  $R_n$  selbst für alle  $n \in \mathbb{N}$  in der Ausschlußmenge enthalten sein.
- c) Split-Graphen sind Graphen, die sich in eine Clique und ein Independent Set zerlegen lassen. Beide Komponenten dürfen durch Kanten verbunden sein. Offenbar erhält das Bilden von induzierten Untergraphen diese Grapheigenschaft. Weiter gibt es eine Charakterisierung durch eine endliche Ausschlußmenge: Da ein Split-Graph chordal ist, darf er keine ungesehnten Kreise enthalten. Wir verbieten 4- bzw. 5-Kreise indem wir sie in die Ausschlußmenge übernehmen. Da ebenfalls das Komplement des Graphen chordal ist, darf es keine ungesehnten Kreise enthalten. Wir verbieten also das Komplement eines 4-Kreises, welches ein 2-Matching ist, indem wir es in die Ausschlußmenge übernehmen. Alle  $k$ -Kreise mit  $k > 5$  haben ein 2-Matching als induzierten Untergraph und sind darum bereits ausgeschlossen. Das Komplement größerer ungesehnter Kreise im Komplementgraphen ist ebenfalls durch diese Menge ausgeschlossen.

## Aufgabe 2 (10 Punkte)

Ordnen Sie das Problem DOUBLE DOMINATION möglichst genau in die  $\mathcal{W}$ -Hierarchie ein und beweisen Sie ihre Behauptung.

Eingabe: Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  und eine Zahl  $k$

Parameter:  $k$

Frage: Gibt es  $D \subseteq V$  mit  $|D| \leq k$ , so daß für alle  $v \in V$  gilt:  $|N[v] \cap D| \geq 2$ ?

$N[v]$  ist die geschlossene Nachbarschaft von  $v$ , die aus  $v$  und all seinen Nachbarn besteht. *Hinweis:* Sie dürfen für eventuelle Reduktionen alle Ihnen aus der Vorlesung und Übung bekannten Probleme verwenden.

*Lösungsvorschlag:*

Wir behaupten DOUBLE DOMINATION sei  $\mathcal{W}[2]$ -vollständig. Dazu zeigen wir, dass DOUBLE DOMINATION  $\mathcal{W}[2]$ -schwer ist, und dass es in  $\mathcal{W}[2]$  ist.

DOMINATING SET ist  $\mathcal{W}[2]$ -vollständig. Wir zeigen die  $\mathcal{W}[2]$ -Schwere von DOUBLE DOMINATION durch eine Reduktion  $\text{DOMINATING SET} \leq_{\text{FPT}} \text{DOUBLE DOMINATION}$ .

DOUBLE DOMINATION ist  $\mathcal{W}[2]$ -schwer: Sei hierzu  $(G, k)$  eine Instanz für DOMINATING SET. Wir transformieren die Instanz zu  $(G', k')$  mit  $k' = k + 2$ . Den Graphen  $G' = (V', E')$  erzeugen wir aus dem Eingabegraphen  $G = (V, E)$ . Dazu setzen wir  $V' = V \cup \{x, y\}$  mit  $x, y \notin V$  und  $E' = E \cup \{\{x, y\}\} \cup \{\{v, x\} | v \in V\}$ . Wir verbinden einen neuen Knoten  $x$  mit allen alten Knoten und fügen  $x$  noch einen zusätzlichen Nachbarn  $y$  zu. Sei nun  $D$  ein DOMINATING SET für  $G$  mit  $|D| \leq k$ . Wir betrachten  $D' = D \cup \{x, y\}$ .  $D'$  ist ein  $k + 2$  DOUBLE DOMINATING SET für  $G'$ . Die Lösbarkeit von DOMINATING SET überträgt sich also durch die Reduktion. Sei nun  $D$  ein DOUBLE DOMINATING SET der Größe  $k + 2$  in  $G'$ . Es gilt  $x, y \in D$ . Angenommen  $x$  oder  $y$  wären nicht in  $D$ , dann wäre  $y$  nicht doppelt dominiert und  $D$  kein DOUBLE DOMINATING SET. Weiter dominiert  $x$  nach Konstruktion alle und  $y$  keine Knoten aus  $V$ . Also müssen die restlichen Knoten in  $D$  jeden Knoten aus  $V$  zusätzlich einfach dominieren. Also sind die anderen  $k$  Knoten aus  $D - \{x, y\}$  ein DOMINATING SET im ursprünglichen Graphen  $G$ . Die Konstruktion ist offenbar in polynomieller Zeit möglich und der neue Parameter ist durch den eine Funktion des ursprünglichen Parameters beschränkt.

DOUBLE DOMINATION ist in  $\mathcal{W}[2]$ . Wir können sehr leicht ein Weft 2 Schaltnetz konstruieren, welches DOUBLE DOMINATION kodiert.

$\Rightarrow$  DOUBLE DOMINATION ist  $\mathcal{W}[2]$ -vollständig. □

### Aufgabe 3 (10 Punkte)

Das beliebte Kinderspiel *Rakuban* besteht darin, auf einem Spielfeld mit einer Figur Steine in Löcher zu schubsen. Das Spielfeld ist ein Teilgraph eines Gitters, bei dem einige Knoten als Löcher (L) ausgewiesen sind. Der Spieler (P) darf sich nur über Felder bewegen, die nicht von einem Stein (S) versperrt sind, kann aber über leere Löcher klettern. Steine können nur auf solche Felder bewegt werden, auf denen noch kein anderer Stein steht. Um einen Stein zu stoßen, muß sich der Spieler auf dem Feld hinter dem Stein befinden. Fällt ein Stein in ein Loch, kann er nicht weiter bewegt werden, blockiert aber weiterhin das Feld für den Spieler und für andere Steine. Die Bewegung des Spielers selbst verursacht keine Kosten, das Bewegen eines Steins um ein Feld jedoch hat die Kosten 1.

Entwerfen Sie einen parametrisierten Algorithmus für das folgende Problem:

Eingabe: Ein Rakuban mit Positionen von  $l$  Löchern,  $s$  Steinen und des Spielers, sowie eine Zahl  $k$ .

Parameter:  $k$

Frage: Gibt es eine Strategie, alle Steine in beliebige Löcher zu stoßen, die dabei höchstens Kosten in Höhe von  $k$  verursacht?

*Lösungsvorschlag:*

Es ist klar, dass ein Spiel nicht gewonnen werden kann, falls mehr Steine eingelocht werden müssen, als Züge erlaubt sind. Also nehmen wir an, es gibt maximal  $k$  Steine. Mit entsprechender Breiten-suche kann man effizient bestimmen, welche Züge möglich sind. Es gibt ausserdem maximal  $4k$  solche Züge, da jeder Stein auf maximal 4 Arten bewegt werden kann. Wir beginnen also mit der Ausgangssituation. Danach stellen wir alle möglichen Spielzüge zusammen und verzweigen in die Fälle, die jeweils einen anderen Zug realisieren. Falls alle Steine eingelocht sind, ist das Spiel lösbar. Dies ist ein beschränkter Suchbaumalgorithmus mit Knotenschriftung  $k$  und Verzweigungsweite  $f(k) = 4k$ . Das Problem ist in FPT. □