

Komplexität

Landau-Notation

$$\mathcal{O}(f) = \left\{ g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |g(n)| \leq c \cdot |f(n)| \right\} \quad (1)$$

$$= \left\{ g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|g(n)|}{|f(n)|} \in \mathbb{R} \right\}, \text{ falls } f(n) = 0 \text{ nur endl. oft gilt} \quad (2)$$

$$\mathcal{O}(f) = \left\{ g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |g(n)| \geq c \cdot |f(n)| \right\} \quad (3)$$

$$= \left\{ g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|g(n)|}{|f(n)|} \in \mathbb{R} \right\}, \text{ falls } f(n) = 0 \text{ nur endl. oft gilt} \quad (4)$$

$$\Theta(f) = \left\{ g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : c_1 \cdot |f(n)| \leq g(n) \leq c_2 \cdot |f(n)| \right\} = \mathcal{O}(f) \cap \mathcal{O}(f) \quad (5)$$

$$= \left\{ g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|g(n)|}{|f(n)|} \in \mathbb{R} \wedge \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|g(n)|}{|f(n)|} \in \mathbb{R} \right\}, \text{ falls } f(n) = 0 \text{ nur endl. oft gilt} \quad (6)$$

Rechnen mit der Landau-Notation

Sei $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, c \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{O}(cf) = \mathcal{O}(f) \quad (7)$$

$$\mathcal{O}(f) + \mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(|f| + |g|) = \mathcal{O}(|f|) \cup \mathcal{O}(|g|) \quad (8)$$

$$\mathcal{O}(f + g) = \mathcal{O}(f) + \mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(f) \cup \mathcal{O}(g) \quad (9)$$

$$\mathcal{O}(f) \cdot \mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(f \circ g) \quad (10)$$

$$\mathcal{O}(fg) = f \circ \mathcal{O}(g) \quad (11)$$

$$\sum_{k=1}^n \mathcal{O}(f(k)) = \mathcal{O}(nf(n)), \text{ falls } |f| \text{ monoton steigt} \quad (12)$$

$$f \circ \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1), \text{ falls } |f| \text{ monoton steigt} \quad (13)$$

Abschätzung mit MacLaurin-Reihe

Sei $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine Funktion. Zerlege $f = h \circ x_n$ mit $h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$, also gilt $f(n) = h(x_n)$. Ist $h \in C^k[-\epsilon, \epsilon]$, dann gilt nach MacLaurin:

$$f = h \circ x_n \stackrel{(k)}{\in} \left[\sum_{i=0}^{k-1} h^{(i)}(0) \frac{x_n^i}{i!} \right] + \mathcal{O}(x_n^k) \quad (14)$$

Logarithmen

Potenzreihenentwicklung

$$\log_e(1+x) = \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \quad (15)$$

Rechenregeln und Abschätzungen

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y \quad (16)$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y \quad (17)$$

$$\sum_x \log x = \log\left(\prod_x x\right) \quad (18)$$

$$\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x \quad (19)$$

$$\log(x^k) = k \cdot \log x \quad (20)$$

$$\log_b(x) = \frac{1}{\log_a(b)} \cdot \log_a(x) \quad (21)$$

$$(\log_b x)' = \left(\frac{1}{\ln b} \ln x \right)' = \frac{1}{x \cdot \ln b} \quad (22)$$

$$\int \log_b x = \frac{1}{\ln b} \int \ln x = \frac{1}{\ln b} (x \ln x - x) + \gamma \quad (23)$$

$$\log(1 \pm \epsilon) \approx \epsilon \quad (24)$$

Approximationen

Näherungen

$$\sqrt{1 + \epsilon} \approx 1 + \frac{\epsilon}{2} \quad (25)$$

$$\frac{1}{1 - \epsilon} \approx 1 + \epsilon \quad (26)$$

$$\frac{1}{1 + \epsilon} \approx 1 - \epsilon \quad (27)$$

Master Theorem

Voraussetzung

Sei $T(n) = a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n)$, mit positiver Funktion $f(n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}, a \in [1, \infty)$ und $b \in (1, \infty)$.

Konsequenz

	Fall I	Fall II	Fall III
Voraussetzung	$f(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b(a-\epsilon)})$	$f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$	$f(n) \in \Omega(n^{\log_b(a+\epsilon)}) \wedge \exists c \in (0, 1) : af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$
Folgerung	$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$	$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$	$T(n) \in \Theta(f)$

Bezüglich des Master-Theorems sind $aT(\frac{n}{b} + c) + f(n), aT(\lceil \frac{n}{b} \rceil) + f(n), aT(\lfloor \frac{n}{b} \rfloor) + f(n)$ äquivalent.

Rekurrenzen

Homogene lineare rekursive Folgen

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ eine lineare rekursive Folge der Ordnung k mit Anfangswerten $x_0, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{K}$.

$$x_n = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i x_{n-i} = \alpha_1 x_{n-1} + \alpha_2 x_{n-2} + \dots + \alpha_{n-k} x_{n-k} \Leftrightarrow 0 = \sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n-i} \quad (28)$$

Polynomialer Ansatz (x_n durch x^n ausdrücken) liefert Nullstellenproblem

$$0 = \sum_{i=0}^k \alpha_i x^{n-i} = x^{n-k} \sum_{i=0}^k \alpha_i x^{k-i}, \chi(x) = \sum_{i=0}^k \alpha_i x^{k-i} \quad (\text{char. Gleichung}) \quad (29)$$

Term x^{n-k} vernachlässigbar (liefert nur triviale Rekursionen). Die $r_i \in \mathbb{K}, i \in \underline{k}$ mit $\chi(r_i) = 0$ sind die Lösungen / Wurzeln. Falls die r_i paarweise verschieden sind, ist der polynomiale Ansatz

$$x_n = \sum_{i=1}^k A_i r_i^n = A_1 r_1^n + \dots + A_k r_k^n \quad (30)$$

Mit Anfangswerten x_0, \dots, x_{k-1} ergibt sich das lin. Gleichungssystem dessen Lösungsvektor die Koeffizienten für die explizite Darstellung von x_n liefert.

$$\begin{pmatrix} r_1^0 & r_2^0 & \dots & r_k^0 \\ r_1^1 & r_2^1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_1^{k-1} & \dots & \dots & r_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{pmatrix} \quad (31)$$

Für den Fall, dass die Wurzeln nicht paarweise verschieden sind sei φ_i die Vielfachheit der Wurzel r_i . Der polynomiale Ansatz ist dann

$$x_n = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\varphi_i} A_{i,j} \cdot n^{j-1} r_i^n = A_{1,1} r_1^n + \dots + A_{1,\varphi_1} n^{\varphi_1-1} r_1^n + \dots + A_{k,1} r_k^n + \dots + A_{k,\varphi_k} r_k^n \quad (32)$$

Wobei die Koeffizienten durch das lineare Gleichungssystem beschrieben werden:

$$Ax = b, x = (A_{1,1}, \dots, A_{1,\varphi_1}, \dots, A_{k,1}, \dots, A_{k,\varphi_k})^T, b = (x_0, \dots, x_{k-1}), A = (a_{ij})_{i,j \in k} \quad (33)$$

Inhomogene lineare rekursive Folgen

Reduktion

Sei $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ eine lineare rekursive Folge der Ordnung k mit Anfangswerten $x_0, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{K}$. Die Rekursionsgleichung hat die Form

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n-i} = f(n) \quad (34)$$

Sei f von einer Form ist, so dass für ein $c \in \mathbb{N}$ die Funktionen $f_0(n) = f(n+0), f_1(n) = f(n+1), \dots, f_c(n) = f(n+c)$ mit Koeffizienten β_0, \dots, β_c zur Nullfunktion linearkombiniert werden können, also wenn β_0, \dots, β_c existiert mit

$$f^* : n \mapsto \beta_0 f(n+0) + \beta_1 f(n+1) + \dots + \beta_c f(n+c) = \sum_{i=0}^c \beta_i f_i(n), f^*(n) = 0 \forall n \in \mathbb{N} \quad (35)$$

dann hat die homogene lineare Rekursionsgleichung

$$\sum_{i=0}^c \sum_{j=0}^k \beta_i \alpha_j x_{n-j+i} = 0 \quad (36)$$

die selben Lösungen wie die ursprüngliche inhomogene lineare Rekursionsgleichung.

Definitionsbereichstransformation

Es wird eine Transformation des Definitionsbereichs durchgeführt. Dazu substituiert man mit einer Funktion $s : n \mapsto s(n)$ die Rekurrenz f zu $f' = f \circ s$. Es ist klar, dass die Transformation s umkehrbar sein muß, damit später zurücks substituiert werden kann. Beispiel:

$$f(n) = 5f\left(\frac{n}{2}\right) + 7f\left(\frac{n}{8}\right) + \log_2 n \xrightarrow{n \rightarrow 2^n} f(2^n) = 5f(2^{n-1}) + 7f(2^{n-3}) + \log_2 2^n \longrightarrow f'(n) = 5f'(n-1) + 7f'(n-3) + n \quad (37)$$

Die Lösung für die Rekurrenz f' wird nun zurücks substituiert mit s^{-1} und man erhält eine Lösung für f .

Nicht lineare rekursive Folgen

Wertebereichstransformation

Anders als bei einer Transformation des Wertebereichs führt man eine Transformation $s : x \mapsto s(x)$ ein und betrachtet dann nicht $f \circ s$ sondern $s \circ f$. Beispiel:

$$f_n = 2^n \cdot f_{n-1}^2 \quad (38)$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow \log_2 x} \log_2 f_n = \log_2(2^n \cdot f_{n-1}^2) = \log_2(2^n) + \log_2(f_{n-1}^2) = n + 2 \cdot \log_2(f_{n-1}) \quad (39)$$

$$\xrightarrow{s_x = s(f_x)} s_n = n + 2 \cdot s_{n-1} \quad (40)$$

Nach dem Lösen der Rekurrenz wird wie gewohnt zurücksubstituiert.