Diskrete Differenziation

Steigende unde fallende Faktorielle

Steigende Faktorielle sind definiert als

$$x^{\overline{n}} := x \cdot (x+1) \cdots (x+n-1), n \in \mathbb{Z}$$

Fallende Faktorielle sind definiert als

$$x^{\underline{n}} := x \cdot (x-1) \cdots (x-n+1), n \in \mathbb{Z}$$

Operatoren

Man definiert für eine Funktion f und eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$.

$$E^a(f) : x \mapsto f(x+a), E^1 = E, E^0 = id$$

$$\Delta : f(x) \mapsto f(x+1) - f(x), \Delta = E - id$$

$$\nabla : f(x) \mapsto f(x) - f(x-1), \nabla = id - E^{-1}$$

Wissen

Aus der Analysis ist bekannt das gilt

$$x^n \frac{\delta}{\delta x} = n \cdot x^{n-1}, n \in \mathbb{Z}$$

Analog dazu gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta x^{\underline{n}} &= \Delta \left(x \cdot (x-1) \cdots (x-n+1) \right) \\
&= (x+1) \cdot x \cdot (x-1) \cdots (x-n+2) - x \cdot (x-1) \cdots (x-n+1) \\
&= [(x+1) - (x-n+1)] \cdot x \cdot (x-1) \cdots (x-n+2) \\
&= n \cdot x^{\underline{n-1}}
\end{aligned}$$

Ebenso gilt:

$$\Delta x^{\underline{1}} = x + 1 - x = 1 = x^{\underline{0}}$$

Überlegung

Was ist $x^{\underline{-1}}$? Es gilt

$$\frac{x^{\underline{n}}}{x^{\underline{n-1}}} = x - n + 1$$

Man rechnet aus das die Quotienten folgendermaßen zusammengesetzt sind:

$$\frac{x^{\underline{3}}}{x^{\underline{2}}} = x - 2, \frac{x^{\underline{2}}}{x^{\underline{1}}} = x - 1, \frac{x^{\underline{1}}}{x^{\underline{0}}} = x$$

Eine sinnvolle Erweiterung wäre

$$\frac{x^{\underline{0}}}{x^{\underline{-1}}} = \frac{1}{x^{\underline{-1}}} = x - (-1) = x + 1$$

Also definiert man

$$x^{\underline{-1}} := \frac{1}{x+1}$$

Um obige Reihe fortsetzen zu können definiert man weiter:

$$x^{\underline{-n}} := \frac{1}{(x+1)\cdot(x+2)\cdots(x+n)}, n > 0$$

Analog zum obigen Teil gilt auch hier

$$\begin{aligned}
\Delta x^{\underline{-n}} &= (x+1)^{\underline{-n}} - x^{\underline{-n}} \\
&= \frac{1}{(x+2)\cdot(x+3)\cdots(x+n+1)} - \frac{1}{(x+1)\cdot(x+2)\cdots(x+n)} \\
&= \left[\frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x+1}\right] \cdot \frac{1}{(x+2)\cdot(x+3)\cdots(x+n)} \\
&= -n \cdot x^{\underline{-(n+1)}}
\end{aligned}$$

Analog gilt für die steigenden Faktoriellen

$$\begin{aligned}
\nabla x^{\overline{n}} &= n \cdot x^{\overline{n-1}} \\
\nabla x^{\overline{-n}} &= \nabla \frac{1}{(x-1)\cdot(x-2)\cdots(x-n)} = -nx^{\overline{n-1}}
\end{aligned}$$

Diskrete Integration

Definition

Falls g Stammfunktion von f ist ($\Delta f = g$), so gilt

$$\sum_{k=a}^{b} g(k) = f(b+1) - f(a)$$

denn $\Delta f = g$ bedeutet $g(k) = f(k+1) - f(k)$, also gilt

$$\sum_{k=a}^{b} g(k) = \sum_{k=a}^{b} \left(f(k+1) - f(k)\right) = f(b+1) - f(a)$$

Anwendungsbeispiele

Man möchte die Summe der 1. n Quadratzahlen berechnen. Hierzu überführt man die reguläre Formulierung in eine diskrete Integration:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k^2}_{reg.Summe} = \underbrace{\sum_{0}^{n+1} x^2}_{diskr.Integral}$$

Die Funktion die diskret integriert werden soll ist $g : x \mapsto x^2$. Es gilt also $g(x)$ in Faktorielle umzuschreiben:

$$g(x) = x^2 = x^2 - x + x = x \cdot (x-1) + x = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$$

Anschliessend wendet man die allgemeinen Integrationsregeln an um das Integral auszuwerten:

$$\begin{aligned}
\sum_{0}^{n+1} \left(x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}\right) &= \sum_{0}^{n+1} x^{\underline{2}} + \sum_{0}^{n+1} x^{\underline{1}} \\
&= \frac{1}{3} x^{\underline{3}} \Big|_{0}^{n+1} + \frac{1}{2} x^{\underline{2}} \Big|_{0}^{n+1} \\
&= \frac{1}{3} \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) + \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot n \\
&= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}
\end{aligned}$$